Correction Devoir surveillé n°3

Exercice 1 - ECRICOME ECT 2018

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

— le premier tirage a lieu dans l'urne U ;

— tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;

— Si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant à lieu dans l'autre urne.

— Si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U $\gg$. Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. U_2 se réalise si, au cours du premier tirage, on a tiré (dans l'urne U) une boule noire, donc

$$\boxed{P(U_2) = \tfrac{1}{3}.}$$

2. Sachant U_2, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}$. Sachant $\overline{U_2}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\bar{U}_2}(U_3) = \frac{1}{4}$. Comme $\left(U_2, \overline{U_2}\right)$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(U_3) &= P(U_2 \cap U_3) + P\left(\overline{U_2} \cap U_3\right) \\
&= P(U_2) P_{U_2}(U_3) + P\left(\overline{U_2}\right) P_{U_2}(U_3) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \\
&\boxed{= \frac{5}{18}}
\end{aligned}$$

3. (a) Sachant U_n, on fait des tirages dans l'urne U, donc :

$$\boxed{P_{U_n}(U_{n+1}) = \tfrac{1}{3}}$$

Sachant $\overline{U_n}$, on fait des tirages dans l'urne

$$\boxed{V : P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \tfrac{1}{4}.}$$

(b) Comme $\left(U_n, \overline{U_n}\right)$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(U_{n+1}) &= P(U_n) P_{U_n}(U_{n+1}) + P\left(\overline{U_n}\right) P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\
&= \frac{1}{3} P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) \\
&= \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} P(U_n)}
\end{aligned}$$

(c) En posant la suite $u_n = P(U_n)$, on remarque que $u_{n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}u_n$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On résout donc l'équation

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}x &\iff x - \frac{1}{12}x = \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{4} \\ &\iff x = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

En posant la suite $v_n = u_n - \dfrac{3}{11}$, on montre que cette suite est géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}u_n - \frac{3}{11} \\ &= -\frac{1}{44} + \frac{1}{12}\left(v_n + \frac{3}{11}\right) \\ &= -\frac{1}{44} + \frac{1}{12}v_n + \frac{1}{44} \\ &\boxed{= \frac{1}{12}v_n} \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$. Enfin, $P(U_1) = 1$ donc $v_1 = u_1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$. On a donc

$$v_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

et alors

$$\boxed{u_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}}$$

(d) Comme $\left|\dfrac{1}{12}\right| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(U_n\right) = \frac{3}{11}.}$$

Partie II - Étude du nombre de boules blanches.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, et puisqu'on fait un tirage dans l'urne U au premier tirage, on a :

$$P\left(X_1 = 0\right) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P\left(X_1 = 1\right) = \frac{2}{3}$$

X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$

2. (a) Sachant $[X_1 = 0]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne U, donc :

$$P_{[X_1=0]}\left(X_2 = 0\right) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}\left(X_2 = 1\right) = \frac{2}{3}$$

Sachant $[X_1 = 1]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne V, donc :

$$P_{[X_1=1]}\left(X_2 = 1\right) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}\left(X_2 = 2\right) = \frac{1}{4}$$

(b) On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} P\left(X_2 = 0\right) &= P\left([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\right) \\ &= P\left(X_1 = 0\right) P_{[X_1=0]}\left(X_2 = 0\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P\left(X_2 = 2\right) &= P\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]\right) \\ &= P\left(X_1 = 1\right) P_{[X_1=1]}\left(X_2 = 2\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &\boxed{= \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{P\left(X_2 = 1\right) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}.}$$

(c) On calcule l'espérance de la variable aléatoire X_2

$$\begin{aligned} E(X_2) &= 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) \\ &= \frac{13}{18} + \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{19}{18}} \end{aligned}$$

3. On rappelle qu'en Scilab, l'instruction $ceil(k * rand())$ permet d'obtenir aléatoirement un nombre entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes pointillés du script Scilab ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
tirage1 = ceil(3*rand())
if tirage1 < 3 then
    res1 = 1
    tirage2 = ceil(4*rand())
    if tirage2 == 1 then res2 = 1
    else res2 = 0
    end
else
    res1 = 0
    tirage2 = ..ceil(3*rand())..
    if tirage2 < 3 then res2 = ..1..
    else res2 = ..0..
    end
end
X2 = res1 + res2
```

4. Pour tout $n \geqslant 1, X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. En effet, il est possible de n'avoir tiré que des boules noires, ou que des boules blanches, et toutes les situations intermédiaires sont possibles. $[X_n = 0]$ se réalise si et seulement si on obtient n fois de suite une boule noire (donc toujours dans l'urne U), donc en utilisant la formule des probabilités composées on en déduit que :

$$\begin{aligned} P\left(X_n = 0\right) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \ldots \cap N_n) \\ &= P(N_1) P_{N_1}(N_2) P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \ldots P_{N_1 \cap \ldots \cap N_{n-1}}(N_n) \\ &\boxed{= \left(\frac{1}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

5. A chaque tirage d'une boule blanche, on change d'urne. Si on a changé un nombre pair de fois d'urne, alors la $(n+1)$-ième boule est bien tirée dans l'urne U.
6. En utilisant le Système Complet d'évènements $\left([X_n = k]\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$, on a

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1} = 1\right) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(X_n = k\right) P_{[X_n = k]}\left(X_{n+1} = 1\right) \\ &= P\left(X_n = 0\right) P_{[X_n = 0]}\left(X_{n+1} = 1\right) + P\left(X_n = 1\right) P_{[X_n = 1]}\left(X_{n+1} = 1\right) \\ &\boxed{= \frac{2}{3} P\left(X_n = 0\right) + \frac{3}{4} P\left(X_n = 1\right)} \end{aligned}$$

En effet, si $[X_n = 0]$ est réalisé, le $(n+1)$ -ième tirage se fait dans l'urne U, donc

$$P_{[X_n = 0]}\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{2}{3} \qquad \text{(proba de tirer une boule blanche dans } U \text{)}$$

De même, si $[X_n = 1]$ est réalisé, le $(n+1)$ -ième tirage se fait dans l'urne V, donc

$$P_{[X_n = 1]}\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{(proba de tirer une boule noire dans } V \text{).}$$

7. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} P\left(X_{n+1} = 1\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{3} P\left(X_n = 0\right) + \frac{3}{4} P\left(X_n = 1\right)\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} P\left(X_n = 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

8. (a) On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\}$.

   - **Initialisation :** On a bien d'une part

   $$u_1 = \frac{4}{3} P(X_1 = 1) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

   et d'autre part

   $$\frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^1\right) = \frac{8}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$$

   donc l'initialisation est vérifié.

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} - \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} + \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} + \left(\frac{40}{45} - \frac{72}{45}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} - \frac{32}{45} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} - \frac{8}{5} \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5} - \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \\
&\boxed{= \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}
\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}$.

(b) On a donc :

$$\boxed{P(X_n = 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u_n = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

(c) Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $0 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0}$$

Exercice 2 - Matrices - ELSCA 1999

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) On applique la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 \\ L2+L1 \\ L3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1-2L2 \\ L2 \\ L3+2L2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1+\frac{1}{2}L3 \\ L2 \\ -\frac{1}{2}L3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L1+\frac{1}{2}L3 \\ L2 \\ -\frac{1}{2}L3 \end{array}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (il est prudent de vérifier que $P.P^{-1} = I$)

(b) On calcule pas à pas :

$$\begin{aligned} A' = P^{-1} \cdot A \cdot P &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= A' \end{aligned}$$

2. (a) Si $A \cdot M = M \cdot A$.alors

$$\begin{aligned} A' \cdot M' &= P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot M \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot A \cdot M \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot M \cdot A \cdot P \\ &= M' \cdot A' \end{aligned}$$

Réciproquement, si M' commute avec A' alors avec $M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$ et comme $A = P \cdot M' \cdot P^{-1}$

$$\begin{aligned} M \cdot A &= P \cdot M' \cdot P^{-1} \cdot P \cdot A' \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot M' \cdot A' \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot A' \cdot M' \cdot P^{-1} \\ &= A \cdot M \end{aligned}$$

donc M et A commutent.

(b) Soit $M' = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A' \cdot M' = M' \cdot A' \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x & a & u \\ 2y & 2b & 2v \\ 3z & 3c & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2a & 3u \\ y & 2b & 3v \\ z & 2c & 3w \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} x = x & a = 0 & u = 0 \\ y = 0 & b = b & v = 0 \\ z = 0 & c = 0 & w = w \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les matrices commutant avec A' sont les . $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, x, b, w pouvant prendre toutes les valeurs réelles.

(c) Les matrice commutant avec A sont donc les

$$\begin{aligned} M = P \cdot M' \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \text{-1} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \text{-1} & \text{-1} & \text{-}\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -x & \frac{x}{2} \\ b & b & 0 \\ -w & -w & -\frac{w}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b-2w & -x+2b-w & \frac{1}{2}(x-w) \\ -b+w & x-b+w & \frac{1}{2}(w-x) \\ -2b+2w & -2b+2w & w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec w, b et x pouvant prendre toutes les valeurs réelles.

Exercice 3 - Analyse

Dans cet exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. La fonction $x \to \sqrt{x} \ln(x)$ est continue si :
   — la fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue i.e. si $x \geqslant 0$
   — la fonction $x \to \ln(x)$ est continue i.e. si $x > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est continue sur } 0, +\infty[.}$$

2. On effectue le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ (ainsi $x = \frac{1}{X}$). Si $x \to 0^+$, alors $X \to +\infty$. On en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{X}} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \frac{-\ln(X)}{\sqrt{X}} = 0$$

$$\boxed{\text{On peut prolonger la fonction } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0.}$$

On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0, +\infty[$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty$ (cf question précédente). Soit $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Or

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 . On en déduit que la courbe de f admet une tangente verticale (dirigée vers le bas) en 0.

4. Soit $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \sqrt{x}\frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$$

Le développement limité à l'ordre 1 de f est

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + (x-1)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$. Or $f(1) = \sqrt{1}\ln(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{\ln(1)+2}{2\sqrt{1}} = 1$ Donc

$$\boxed{f(x) = (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0}$$

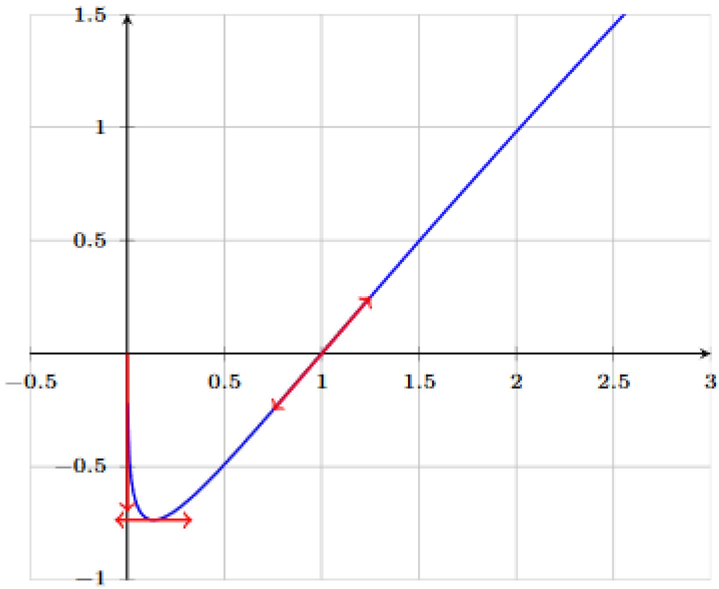
5. Soit $x > 0$. On détermine le signe de $f'(x)$. Comme $2\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)+2$. Or :

$$\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-2}$$

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$f(\mathrm{e}^{-2})$	$\nearrow$	$+\infty$

6. On a la courbe



Exercice 4 - Étude d'un polynôme et d'une suite

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \quad \text{et} \quad P(x) = f(x) - x = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

On pose alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1;3]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On remarque que 1 est une racine évidente de ce polynôme car

$$P(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 + 7 \times 1 - 3 = 0$$

On divise donc le polynôme P par $X-1$. On obtient, (en utilisant par exemple une division euclidienne), $P(X) = (X-1)(X^2-4X+3)$. On calcule alors le discriminant du polynôme X^2-4X+3 :

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4$$

Il y a donc deux racines sur ce polynôme,

$$X_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

On a donc la factorisation

$$\boxed{P(X) = (X-1)^2(X-3).}$$

2. On fait alors le tableau de signe en utilisant les résultats de la question 1.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $(x-1)^2$		$+$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de P		$-$	0	$-$	0	$+$	

Le polynôme P est positif sur $]-3;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-1;1[$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme) donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$$

Afin de déterminer le tableau de signe de f' et de variation de f, on détermine le discriminant de $3x^2 - 10x + 8 = 0$, à savoir $\Delta = 100 - 4 \times 3 \times 8 = 4$. Il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{10-2}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+2}{6} = 2$$

On calcule ensuite les limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

On a donc

$$f(4/3) = \frac{64}{27} - 5 \times \frac{16}{9} + 8 \times \frac{4}{3} - 3 = \frac{64}{27} - \frac{240}{27} + \frac{288}{27} - \frac{81}{27} = \frac{31}{27}$$

et

$$f(2) = 8 - 20 + 16 - 3 = 1$$

On en déduit donc le tableau de variation.

x	$-\infty$		$4/3$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. On montre par récurrence les propositions propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n \in [1;3]\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 \in [1;3]$.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On calcule $f(1) = 1 - 5 \times 1^2 + 8 \times 1 - 3 = 1$ et $f(3) = 27 - 5 \times 9 + 8 \times 3 - 3 = 3$. En observant le tableau de variation de la fonction f. On voit que le minimum de la fonction f sur $[1,3]$ est 1 et son maximum est 3.
     Donc si $u_n \in [1,3]$, $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,3]$. Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;3]}$.

5. On a montré à la question 2 que pour $x \in [1;3]$ $f(x) - x \leq 0$. Or, $u_n \geq 1$ donc

$$f(u_n) - u_n \leq 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

6. La suite (u_n) est décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc convergente.}}$$

On note ℓ la limite de (u_n). La fonction f est continue sur $[1,3]$. Donc on applique le théorème du point fixe. On a nécessairement

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Longleftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \\ &\Longleftrightarrow P(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Or on a déterminé les racines de P qui sont 1 et 3. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 3$. Or $u_n \in [1;3]$ et (u_n) est décroissante donc $u_n \geq \ell$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

7. On écrit le script Scilab :

```
u = input("Entrez un nombre réel u0 :")
n = input("Entrez un nombre entier n:")
for k = 1:n
     u = u^3 - 5*u^2 + 8*u - 3
end
disp(u)
```

8. On suppose dans cette question que $u_0 > 3$. Or pour $x > 3$, $P(x) \geq 0$. On montre par récurrence (comme à la question 4) que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 3$. Donc $P(u_n) \geq 0 \iff u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est alors croissante.

   Supposons que cette suite soit majorée. Elle serait alors convergente et sa limite (théorème du point fixe) vaudra nécessairement 1 ou 3. Or comme (u_n) croissante, $u_n \leq \ell$, ce qui serait absurde.

   Donc la suite n'est pas majorée.

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc divergente.}}$$

Problème - Suites implicites et polynôme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

Le but de ce problème est d'étudier l'équation $f_n(x) = 0$ et le comportement de la solution quand n tend vers $+\infty$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est un polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

   $$f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x = x(nx^{n-2} + 18)$$

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $nx^{n-2} + 18 > 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On calcule

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = -4 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

   On a donc le tableau de variation suivant

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Variations de f_n	$-4 \nearrow +\infty$

   La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (fonction polynôme). La fonction f_n est strictement croissante et

   $$f_n(\mathbb{R}_+) = [-4; +\infty[$$

   D'après le théorème de la bijection,

   $$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée } u_n}$$

   (b) u_1 est la solution de l'équation

   $$\begin{aligned} f_1(x) = 0 &\iff x + 9x^2 - 4 = 0 \\ &\iff 9x^2 + x - 4 = 0 \end{aligned}$$

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 144 = 145$ Il y a alors deux solutions

   $$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{145}}{18} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}$$

   $$\boxed{\text{On a ainsi } u_1 = \frac{\sqrt{145} - 1}{18}.}$$

u_2 est la solution positive de l'équation

$$\begin{aligned} f_2(x)=0 &\iff 10x^2-4=0 \\ &\iff 10x^2=4 \\ &\iff x^2=\frac{2}{5} \\ &\iff x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } u_2=\sqrt{\frac{2}{5}}.}$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On calcule

$$f_n(0)=-4 \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n+9\times\frac{4}{9}-4=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On a donc $f_n(0)\times f_n(2/3)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la solution de $f_n(x)=0$ est comprise entre 0 et $\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in]\,0,\tfrac{2}{3}[}$$

2. (a) Soit $x\in]0,1\,[$, on calcule

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)-f_n(x) &= x^{n+1}+9x^2-4-(x^n+9x^2-4) \\ &= x^{n+1}-x^n \\ &= x^n(x-1) \end{aligned}$$

Or $x^n>0$, et $(x-1)<0$. Donc

$$\boxed{\forall x\in]0;1[, f_{n+1}(x)<f_n(x).}$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\in]0;1[$ (question 1(c)). On a donc d'après la question précédente :

$$f_{n+1}(u_{n+1})<f_n(u_{n+1})$$

Et comme par définition, $f_{n+1}(u_{n+1})=0$,

$$\boxed{\text{on a } f_n\left(u_{n+1}\right)>0}$$

Enfin, comme $f_n(u_n)=0$ et que f_n est bijective et croissante, on a

$$\begin{aligned} f_n\left(u_{n+1}\right)>0 &\iff f_n\left(u_{n+1}\right)>f_n(u_n) \\ &\iff f_n^{-1}(f_n(u_{n+1}))>f_n^{-1}(f_n(u_n)) \\ &\iff u_{n+1}>u_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $2/3$.

$$\boxed{\text{Elle est convergente.}}$$

On note ℓ sa limite.

3. (a) D'après la question 1.c. : $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$ La fonction élévation à la puissance n étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\dfrac{2}{3} < 1$. Donc, par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{(u_n^n) \text{ est convergente de limite } 0.}$$

(b) On sait que

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 0 &\iff u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 \\ &\iff 9u_n^2 = 4 - u_n^n \\ &\iff u_n^2 = \frac{4}{9} - \frac{u_n^n}{9} \\ &\iff |u_n| = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{u_n^n}{9}} \end{aligned}$$

Or $u_n > 0$, donc $u_n = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{u_n^n}{9}}$. Or d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}}$$

4. On note $u_n = \frac{2}{3} + v_n$

(a) On sait que (u_n) est convergente et tend vers $\dfrac{2}{3}$, or $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est convergente et } v_n \text{ tend vers } 0 .}$$

(b) Par définition

$$f_n(u_n) = u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0.$$

Or $u_n = \frac{2}{3} + v_n$ On en déduit que

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^2 - 4 &= \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3}v_n + v_n^2\right) - 4 \\ &= \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 4 + 12v_n + 9v_n^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \left(\tfrac{2}{3} + v_n\right)^n + 9v_n^2 + 12v_n = 0.}$$

(c) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9v_n^2 + 12v_n = 0 &\iff 9v_n^2 + 12v_n = -\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n \\ &\iff v_n(9v_n + 12) = -\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n \\ &\iff \boxed{v_n = \frac{-\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n}{9v_n + 12}} \end{aligned}$$

(d) On a alors

$$\begin{aligned} v_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}+v_n\right)^n}{9v_n+12} &\iff v_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\left(1+\dfrac{3}{2}v_n\right)\right)^n}{12\left(\dfrac{9}{12}v_n+1\right)} \\ &\iff v_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\dfrac{3}{2}v_n\right)^n}{12\left(\dfrac{9}{12}v_n+1\right)} \\ &\iff \frac{12v_n}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{3}{2}v_n\right)^n}{\dfrac{9}{12}v_n+1} \\ &\iff \frac{v_n}{-\dfrac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{3}{2}v_n\right)^n}{\dfrac{9}{12}v_n+1} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{-\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1.}$$

5. On a

```
function y =f5(x)
    y = x^5 + 9 * x^2 -4
endfunction

X = linspace(0,10, 10000)
plot(X,f5)
```